

1.1 Β. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Δύναμη με βάση a και εκθέτη n

Είναι η παράσταση a^n , όπου a πραγματικός και n φυσικός ≥ 2 .

Ορίζουμε ότι $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ -φορές}}$

Επίσης ορίζουμε ότι $a^1 = a$, $a^0 = 1$ με $a \neq 0$, και $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ με $a \neq 0$

2.

Ιδιότητες δυνάμεων : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \text{με } a, b \neq 0$$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Οι ιδιότητες των δυνάμεων διαφορετικά

Θα πρέπει να μάθουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων και από το 2^ο μέλος στο 1^ο.

$$\text{Πχ } a^n b^n = (ab)^n$$

2.

Προτεραιότητα

Σε αριθμητική παράσταση με δυνάμεις, για να κάνουμε πράξεις πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις και μετά προχωράμε στα πόλοιπα.

3.

Αρνητική βάση

Όταν η βάση της δύναμης είναι αρνητικός αριθμός

- αν μεν ο εκθέτης είναι **άρτιος**, τότε το αποτέλεσμα είναι **θετικό**
- αν δε ο εκθέτης είναι **περιττός**, τότε το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό**

4.

Οι δυνάμεις 10^v και 10^{-v} Είναι $10^v = 1000 \dots 0$ όπου τα μηδενικά είναι v $10^{-v} = 0,000 \dots 01$ όπου τα δεκαδικά ψηφία είναι v **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1.

Η παράσταση $(-3)^2$ είναι ίση με Α. 6, Β. -6, Γ. 9, Δ. -9.

Να επιλέξεις την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

θεωρία 1

 $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ άρα σωστό το Γ

2.

Η παράσταση -3^2 είναι ίση με Α. 6, Β. -6, Γ. 9, Δ. -9.

Να επιλέξεις την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση $-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$ άρα σωστό το Δ

3.

Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς με μορφή δύναμης

i) $1000 = \dots$, ii) $0,001 = \dots$, iii) $0,0000001 = \dots$, iv) $100000 = \dots$ **Προτεινόμενη λύση**i) $1000 = 10^3$ ii) $0,001 = 10^{-3}$ iii) $0,0000001 = 10^{-7}$ iv) $100000 = 10^5$

Σχόλιο 4

4.

Να συμπληρώσεις τον πίνακα

x	-0,0001	0,1	-1000	$3 \cdot 10^2$	$-\frac{3}{4}$
x^2	10^{-8}	10^{-2}	10^6	$9 \cdot 10^4$	$\frac{9}{16}$
x^{-2}	10^8	10^2	10^{-6}	$\frac{1}{9} 10^{-4}$	$\frac{16}{9}$
x^{-1}	-10^4	10	-10^{-3}	$\frac{1}{3} 10^{-2}$	$-\frac{4}{3}$

Προτεινόμενη λύση

1^η στήλη $x = -0,0001 = -10^{-4}$ οπότε $x^2 = (-10^{-4})^2 = 10^{-8}$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{10^{-8}} = 10^8$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{-10^{-4}} = -10^4$$

2^η στήλη $x = 0,1 = 10^{-1}$ οπότε $x^2 = (10^{-1})^2 = 10^{-2}$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{10^{-2}} = 10^2$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{10^{-1}} = 10$$

Θεωρία 1-2
Σχόλια 3 4

3^η στήλη $x = -1000 = -10^3$ οπότε $x^2 = (-10^3)^2 = 10^6$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{-10^3} = -10^{-3}$$

4^η στήλη $x = 3 \cdot 10^2$ οπότε $x^2 = (3 \cdot 10^2)^2 = 3^2 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^4$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^4} = \frac{1}{9} 10^{-4}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{3 \cdot 10^2} = \frac{1}{3} 10^{-2}$$

5^η στήλη $x = -\frac{3}{4}$ οπότε $x^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9} \quad \text{και} \quad x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

5.

Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις

α) $(-2)^4 \cdot 3 - 34 + (-2)^5 : 8$

β) $(3-4)^2 + (2 \cdot 5 - 10)^{12} + (18 + 563 - 156)^0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}
 (-2)^4 \cdot 3 - 34 + (-2)^5 : 8 &= 16 \cdot 3 - 34 + (-32) : 8 = \\
 &= 48 - 34 + (-4) = \\
 &= 48 - 34 - 4 = 10
 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}
 (3-4)^2 + (2 \cdot 5 - 10)^{12} + (18 + 563 - 156)^0 &= (-1)^2 + (10-10)^{12} + 425^0 = 1 + 0 + 1 = \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

6.

Εφαρμόζοντας κατάλληλες ιδιότητες των δυνάμεων να βρεις την τιμή των παραστάσεων

$$\alpha) \frac{36^4}{(-18)^4}, \quad \beta) \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^4, \quad \gamma) \frac{(-12)^5}{6^5} - \frac{14^4}{(-7)^4} + \frac{6^3}{(-2)^3}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{36^4}{(-18)^4} = \left(\frac{36}{-18}\right)^4 = (-2)^4 = 16$$

σχόλια 1-3

β)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

γ)

$$\begin{aligned}
 \frac{(-12)^5}{6^5} - \frac{14^4}{(-7)^4} + \frac{6^3}{(-2)^3} &= \left(\frac{-12}{6}\right)^5 - \left(\frac{14}{-7}\right)^4 + \left(\frac{6}{-2}\right)^3 = \\
 &= (-2)^5 - (-2)^4 + (-2)^3 = \\
 &= -32 - 16 - 8 = -56
 \end{aligned}$$

7.

Να γίνουν οι πράξεις.

α) $3\alpha^5 \cdot 4\alpha^2$

β) $-2\alpha^4\beta^3 \cdot 5\alpha^2\beta^6$

γ) $-3x y^2 \omega^3 \cdot 6x^2 y$

δ) $(2x^2 y^3)^4$

ε) $(\alpha^2\beta)^3 \alpha^5 \beta^4 \gamma$

ζ) $(2\alpha\beta^2\gamma^3)(\alpha^2\beta)^2$

η) $5\alpha^3\beta^2\gamma^5 6\alpha^2\beta^4\gamma^{-6} 2\alpha^{-3}\beta^2$

θ) $(3\alpha^2\beta\gamma^2)(\alpha^3\beta^2)^4$

Προτεινόμενη λύση

α) $3\alpha^5 \cdot 4\alpha^2 = 12\alpha^7$

β) $-2\alpha^4\beta^3 \cdot 5\alpha^2\beta^6 = -10\alpha^6\beta^9$

γ) $-3x y^2 \omega^3 \cdot 6x^2 y = -18x^3 y^3 \omega^3$

δ) $(2x^2 y^3)^4 = 16x^8 y^{12}$

ε) $(\alpha^2\beta)^3 \alpha^5 \beta^4 \gamma = \alpha^6\beta^3 \alpha^5 \beta^4 \gamma = \alpha^{11}\beta^7 \gamma$

ζ) $(2\alpha\beta^2\gamma^3)(\alpha^2\beta)^2 = (2\alpha\beta^2\gamma^3)(\alpha^4\beta^2) = 2\alpha^5\beta^4\gamma^3$

η) $5\alpha^3\beta^2\gamma^5 6\alpha^2\beta^4\gamma^{-4} 2\alpha^{-3}\beta^2 = 60\alpha^2\beta^8\gamma$

θ) $(3\alpha^2\beta\gamma^2)(\alpha^3\beta^2)^4 = (3\alpha^2\beta\gamma^2)(\alpha^{12}\beta^8) = 3\alpha^{14}\beta^9\gamma^2$

8.

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

α) $\frac{15x^8 y^5}{5x^5 y^2}$

β) $\frac{-2x^3 y^4}{10x^7 y^2}$

γ) $\frac{(2xy^2)^3}{x^2 y^3}$

δ) $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^3}{x^5}\right)^{-1}$

ε) $\left(\frac{\alpha^4}{\beta^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\beta^4}{\alpha^5}\right)^{-1}$

ζ) $(\alpha^{-1} \beta^{-2})^{-3} \cdot (\alpha^2 \beta)$

η) $\left(\frac{1}{2}\alpha^2\beta^2\right)^3 \left(-\frac{1}{3}\alpha\beta^2\gamma^3\right)^3 (-6\alpha\beta\gamma)^{-1}$

Προτεινόμενη λύση

α) $\frac{15x^8 y^5}{5x^5 y^2} = 3x^3 y^3$

β) $\frac{-2x^3 y^4}{10x^7 y^2} = \frac{-y^2}{5x^4}$

γ) $\frac{(2xy^2)^3}{x^2 y^3} = \frac{8x^3 y^6}{x^2 y^3} = 8xy^3$

δ) $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^3}{x^5}\right)^{-1} = \left(\frac{y^4}{x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^5}{y^3}\right)^1 = \frac{y^8}{x^6} \cdot \frac{x^5}{y^3} = \frac{y^5}{x}$

ε) $\left(\frac{\alpha^4}{\beta^5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\beta^4}{\alpha^5}\right)^{-1} = \left(\frac{\beta^5}{\alpha^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{\alpha^5}{\beta^4}\right)^1 = \frac{\beta^{15}}{\alpha^{12}} \cdot \frac{\alpha^5}{\beta^4} = \frac{\beta^{11}}{\alpha^7}$

ζ) $(\alpha^{-1} \beta^{-2})^{-3} \cdot (\alpha^2 \beta) = (\alpha^3 \beta^6)(\alpha^2 \beta) = \alpha^5 \beta^7$

9.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) (x^2 y^3 \kappa^5)^{-2} : (x^{-1} y^{-2} \kappa^{-3})^4$$

$$\beta) (8x^5 y^{-2}) : (2x^{-2} y)$$

$$\gamma) (3\alpha^2 \beta \gamma)(-2\alpha^3 \beta^2 \gamma) : (6\alpha^2 \beta \gamma)^2$$

$$\delta) (3\alpha \omega^{2\mu})^3 : (-2\alpha^3 \omega^\mu)^2$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} (x^2 y^3 \kappa^5)^{-2} : (x^{-1} y^{-2} \kappa^{-3})^4 &= (x^{-4} y^{-6} \kappa^{-10}) : (x^{-4} y^{-8} \kappa^{-12}) = \\ &= \frac{x^{-4} y^{-6} \kappa^{-10}}{x^{-4} y^{-8} \kappa^{-12}} = \frac{1}{y^{-2} \kappa^{-2}} = y^2 \kappa^2 \end{aligned}$$

β)

$$(8x^5 y^{-2}) : (2x^{-2} y) = \frac{8x^5 y^{-2}}{2x^{-2} y} = \frac{4x^7}{y^3}$$

γ)

$$\begin{aligned} (3\alpha^2 \beta \gamma)(-2\alpha^3 \beta^2 \gamma) : (6\alpha^2 \beta \gamma)^2 &= (-6\alpha^5 \beta^3 \gamma^2) : (36\alpha^4 \beta^2 \gamma^2) = \\ &= \frac{-6\alpha^5 \beta^3 \gamma^2}{36\alpha^4 \beta^2 \gamma^2} = \frac{-\alpha \beta}{6} \end{aligned}$$

δ)

$$(3\alpha \omega^{2\mu})^3 : (-2\alpha^3 \omega^\mu)^2 = (27\alpha^3 \omega^{6\mu}) : (4\alpha^6 \omega^{2\mu}) = \frac{27\alpha^3 \omega^{6\mu}}{4\alpha^6 \omega^{2\mu}} = \frac{27\omega^{4\mu}}{4\alpha^3}$$

10.

Να γίνουν οι πράξεις και να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\Pi = \left[(x^2 y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4 \right] : (x^3 : y^{-1})^{-3} \quad \text{για } x = 2013 \text{ και } y = 2013^{-1}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \Pi &= \left[(x^2 y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4 \right] : (x^3 : y^{-1})^{-3} = \left[(x^{-4} y^{-6}) \cdot (x^4 y^{12}) \right] : (x^{-9} : y^3) = \\ &= (x^0 y^6) : \frac{x^{-9}}{y^3} = 1 \cdot y^6 \cdot \frac{y^3}{x^{-9}} = y^9 x^9 = (xy)^9 \end{aligned}$$

Για $x = 2013$ και $y = 2013^{-1}$ η τιμή της παράστασης είναι

$$\Pi = (2013 \cdot 2013^{-1})^9 = 1^9 = 1$$